五度相生法的音律计算通项式及其应用

陈根方

（浙江音乐学院，杭州，310024，cgf@zjcm.edu.cn）

摘要：本文简要回顾了五度相生法的生律特征和音律计算的研究成果，推导和证明了五度相生法的上行五度音列和下行五度音列的分数式通项计算公式，结合两个分数式通项式证明了五度相生法的简易计算公式。利用这些公式可以直接计算任意位置上的音律，而无需从起始律开始链式计算中间的音律，依据简易计算公式可以把五度相生法的上行五度音列和下行五度音列合并为自变量为整数数轴的五度音列。本文利用简易计算公式得到了五度音列中每个音与起始音之间音程音分值的计算公式，依据一致分布的理论得到了五度音列的无穷个音分值在八度内是一致分布的结论。根据三间隔理论分析和图示了五声音阶、七声音阶、十二声音阶、京房六十律和钱乐之三百六十律的的不同音程数量和它们出现的次数。

关键词: 五度相生法; 通项计算公式; 一致分布; 音差; 三间隔理论; 京房六十律；钱乐之三百六十律

分类号：J60-05

The formula for the calculation of the fifth-generated method of musical tuning and its application

Gen-Fang Chen

(Zhejiang Conservatory of Music, Hangchou, 310024, China)

Abstract:In this paper, we briefly review the characteristics of the fifth-generated method and the research results of the tone calculation, derive and prove the fractional formula of the ascending fifth’s tone series and the descending fifth’s tone series using fifth-generated method, and prove the simple formula of the fifth-generated method by combining two fractional formula of the ascending fifth’s tone series and the descending fifth’s tone series. These formulas can be used to directly calculate the pitch at any position in these series, without chain computing the middle pitch from the initial pitch. According to the simple calculation formula, the ascending and descending fifth’s tone series can be combined into a fifth’s tone series whose independent variable is an integer number. In this paper, a simple formula is used to calculate the interval between each tone and the initial tone in the fifth’s series. Based on the theory of uniform distribution, it is concluded that the infinite tone the series are Uniform Distribution within the octave. According to the three-gap theory, the number of intervals and the number of their occurrences in the pentatonic scale, the heptonic scale, the twelve-tone scale, the 60-tone of King Fang and the 360-tone of Qian Lezhi are analyzed and illustrated.

Keywords: the fifth-generated method; computing formula; Uniform Distribution; common; the three-gap theory; the 60-tone of King Fang; the 360-tone of Qian Lezhi

1 前言

五度相生律(the fifth-generated system)是国际通用的三种主要律制之一，在西方音乐体系中也叫毕达哥拉斯律（Pythagorean Tuning）[1]，中国古代的三分损益律也隶属于五度相生律体系[2]。五度相生法是五度相生律的音律计算方法，生律方法是先人为给定起始律的频率，然后利用五度关系分别向上和向下，逐个计算音律的频率，如需要计算乐音 A 的频率，先确定 C 的频率 f_0，然后依向上纯五度关系，按 C-G-D-A 顺序，分别计算出乐音 G 和 D 的频率，最后计算 A 的频率，这种传统的链式生律方法已被广泛应用于音乐艺术领域。

毕达哥拉斯学派发现了调整乐器 Monochord 中弦的长度可发出不同音高的音，当长度比为 3：2 的时发出的两个音呈纯五度关系[3]。中国古代音乐实践也发现了“三分损一”和“三分益一”的音律计算方法，史称三分损益法[4]。现在通用的五度相生法从起始律出发，可以按纯五度关系上行链式得到上行五度音列，上行五度音列相邻两个音律的频率比为 3：2 或 3：4，也可以可以按纯五度关系下行链式得到下行五度音列，下行五度音列相邻两个音律的频率比为 2：3 或 4：3，这样在五度音列中，任意两个音列的频率比可以表示为 $2^p \times 3^q$，$p \in Z, q \in Z$，Z 表示整数集合[5]。

Fichard[6]等人给出了毕达哥拉斯律的一个第 i 个音律与起始律的频率比计算公式，$f_i = (3/2)^i / 2^j, j = \lfloor i * \log_2(3/2) \rfloor$，此公式可计算五度相生法的上行五度音列的第 i 个音律与起始律的频率比。陈其翔[7]等利用多位小数分数逼近法来生成“三分损益法”的各律，此方法可得到误差越来越小的生律次数及其误差的音分值。

在计算频率的过程中，中外学者不约而同地把需要计算的音律的频率约定在二倍以内，这样生成的音律和起始律的音程关系在八度以内。如陈应时在文献[8]中引用汉代京房的音律产生的规则：“上生不得过黄钟之浊，下生不得及黄钟之清。”，也说明京房在计算音律时要求新律的音高在起始律的一个八度以内。

2 五度相生法音律计算通项式

先推导出五度相生法计算音律的分数通项式和简易通项式，以及音分计算公式，然后分析它们和传统的链式生律方法之间的优缺点。

2.1 分数通项式

先引入几个符号，当 $x \in R$ 是实数时，用 $\lfloor x \rfloor$ 表示不超过 x 的最大整数，用 $\{x\}$

表示 x 的小数部分，即有 $x=\lfloor x\rfloor+\{x\}$。由文献[9]可以，可得：

引理 1：对于所有实数 x 而言，$\{x\}$满足，$0\le\{x\}<1$。

下面先证明分数式通项计算公式。

定理 1：五度相生法的八度内五度音列的分数式通项计算公式如下：

（1）上行五度音列的第 i 次生律的计算公式：

$$f_i=f_0\times\frac{3^i}{2^{\lfloor i\log_2 3\rfloor}} \qquad (1)$$

（2）下行五度音列的第 i 次生律的计算公式：

$$f_i^{'}=f_0\times\frac{2^{\lfloor i\log_2 3\rfloor+1}}{3^i} \qquad (2)$$

其中 f_i 表示上行五度音列的第 i 个音律，$f_i^{'}$ 表示下行五度音列的第 i 个音律，f_0 表示起始音律的频率。

证明：（1）五度相生法计算上行五度音列，是从起始律的频率 f_0 起，逐个计算下一个音律，从当前音律计算下一个音律，乘以分数 $\frac{3}{2}$ 或 $\frac{3}{4}$，即每生成一次新的音律，分子都乘以一次 3，而分母乘以 2 或 4，这样当前第 i 个音律频率和起始律的频率的比可以表示为 $\frac{3^i}{2^j}$。

由于五度相生法产生的五度音列中，每个乐音都在起始律乐音的八度之内，即每个新产生的音律频率的范围不能超过起始律频率的 2 倍，这样频率比 $\frac{3^i}{2^j}$ 满足

$$1\le\frac{3^i}{2^j}<2,i\in N\text{。}$$

分别考虑两个不等式：

（1.1）第一个是 $1\le\frac{3^i}{2^j}$：当 $i,j\ge1$ 时有

$$1\le\frac{3^i}{2^j}\to2^j\le3^i\to\log_2\left(2^j\right)\le\log_2\left(3^i\right)\to j\le\log_2 3^i\to j\le i\log_2 3$$

（1.2）第二个是 $\frac{3^i}{2^j}<2$：当 $i,j\ge1$ 时有

$$\frac{3^i}{2^j}<2 \to 3^i<2\times 2^j \to \log_2\left(3^i\right)<\log_2\left(2\times 2^j\right) \to \log_2\left(3^i\right)<j+1 \to j>\log_2\left(3^i\right)-1$$
$$\to j>i\log_2 3-1$$

由上面（1.1）和（1.2）两种情况，可得到不等式：

$$i\log_2 3-1<j\le i\log_2 3$$

由于$\log_2 3$是无理数，而 i 是整数，因此$i\log_2 3-1$与$i\log_2 3$都是无理数。由于 j 是整数，又因为$i\log_2 3-1$与$i\log_2 3$这二个无理数之间有且只有一个整数$\lfloor i\log_2 3\rfloor$，它正是 j，因此根据上式子不等式可以得到：

$$j=\lfloor i\log_2 3\rfloor$$

把这个结果代入频率比$\frac{3^i}{2^j}$，得到上行五度音列的分数式通项计算公式（1）。

（2）五度相生法计算下行五度音列，是从起始律的频率f_0起，逐个计算下一个音律，从当前音律计算下一个音律，乘以分数$\frac{2}{3}$或$\frac{4}{3}$，即每生成一次新的音律，分母都乘以一次 3，而分子乘以 2 或 4，这样当前第 i 个音律频率和起始律的频率的比可以表示为$\frac{2^j}{3^i}$。

由于五度相生法产生的五度音列中，每个乐音都在起始律乐音的八度之内，即每个新产生的音律频率的范围不能超过起始律频率的 2 倍，这样频率比$\frac{2^j}{3^i}$满足$1\le\frac{2^j}{3^i}<2, i\in N$。

分别考虑两个不等式：

（2.1）第一个$1\le\frac{2^j}{3^i}$：当$i,j\ge 1$时有

$$3^i\le 2^j \to \log_2 3^i\le\log_2 2^j \to i\log_2 3\le j$$

（2.2）第二个$\frac{2^j}{3^i}<2$：当$i,j\ge 1$时有

$$2^{j-1}<3^i \to \log_2 2^{j-1}<\log_2 3^i \to j<i\log_2 3+1$$

由（2.1）和（2.1）两种情况可知，有不等式：

$$i\log_2 3\le j<i\log_2 3+1$$

由于$\log_2 3$是无理数，而 i 是整数，因此$i\log_2 3$与$i\log_2 3+1$都是无理数。由于 j

是整数，又因为 $i\log_2 3$ 与 $i\log_2 3+1$ 这二个无理数之间有且只有一个整数 $\lfloor i\log_2 3\rfloor+1$，因此根据上面不等式可以得到：

$$j=\lfloor i\log_2 3\rfloor+1$$

把这个结果代入频率比 $\frac{2^j}{3^i}$，得到下行五度音列的分数式通项计算公式（2）。证毕！

五度相生法传统计算方法，是从起始律出发，一个一个音律先后生成，是链式的生律方法。如果只需要计算上行五度音列的第 12 个音律的频率，传统链式法需要从第 1 个起始律开始，逐个计算出第 2 到第 11 个的音律频率，才能计算出第 12 个音律频率。而利用定理 1 的公式（1）和公式（2）可直接计算出任意位置上的音频频率，如计算上行五度音列的第 12 个音律频率可直接利用 $f_0\times\frac{3^{12}}{2^{\lfloor 12\times\log_2 3\rfloor}}$，极大方便了音律的计算。

由定理 1 的公式（1）和（2），可以得到上行五度音列和下行五度音列的第 i 个音律与起始律的频率比，分别是 $\frac{3^i}{2^{\lfloor i\log_2 3\rfloor}}$ 和 $\frac{2^{\lfloor i\log_2 3\rfloor+1}}{3^i}$。其中上行五度音列的频率比与文献[6]的结论相同。

在定理 1 的公式（1）中，分母指数随着生律次数加 1 而加 1，分子的指数则受到八度内生律的约束，加 1 或加 2，同样在公式（2）中，分子指数随着生律次数加 1 而加 1，分母的指数则受到八度内生律的约束，加 1 或加 2。图 1 比较了生成的前 11 个（不包括起始律）音律的上行五度音列的公式（1）分母指数和前 11 个（不包括起始律）音律的下行五度音列的的公式（2）分子指数的增加趋势图。图 1 显示数字 2 的指数是严格递增的，而且第 i 个的下行五度音列的分子 2 的指数比第 i 个的上行五度音列的分母 2 的指数大 1，这符合定理 1 的结论。

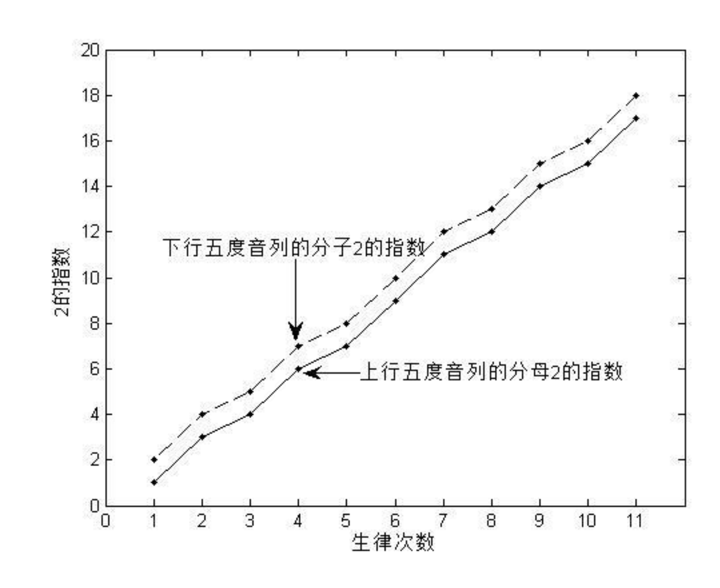


图 1 上行和下行五度音律的生律次数与 2 的指数之间的关系

2.2 简易通项式

定理 1 的公式（1）和公式（2）给出了计算五度音列中任意位置音律的通项式，比如可直接计算上行五度音列的第 101 个音律频率，即 $f_0 \times \frac{3^{100}}{2^{\lfloor 100\times\log_2 3\rfloor}}$，先分别计算出分子 3^{100} 和分母 2^{158}，在利用分数计算出具体的频率，但是 3^{100} 和 2^{158} 都是大整数，利用计算机进行计算时容易溢出，会产生不正确的结果。

下面给出五度相生法的统一的简易计算通项式，可避免大整数的计算。先来证明一个引理。

引理 2：对于无理数 x 而言，当 x<0 时，有 $\lfloor x\rfloor = -(\lfloor |x| \rfloor + 1)$。

证明：

由于 $x = \lfloor x\rfloor + \{x\}$，根据引理 1 有 $0 \le \{x\} < 1$，当 x<0 且为无理数时，也有 $0 < \{x\} < 1$，从而：

$$0 < \{x\} < 1 \to 0 < x - \lfloor x\rfloor < 1 \to 0 < -|x| - \lfloor x\rfloor < 1 \to 0 < -(\lfloor |x|\rfloor + \{|x|\}) - \lfloor x\rfloor < 1$$
$$\to \lfloor |x|\rfloor + \{|x|\} < -\lfloor x\rfloor < \lfloor |x|\rfloor + \{|x|\} + 1$$

由于 x 是无理数，所以 $\lfloor |x|\rfloor + \{|x|\}$ 和 $\lfloor |x|\rfloor + \{|x|\} + 1$ 两个数都是无理数，这两个数相差 1，这样满足大于 $\lfloor |x|\rfloor + \{|x|\}$ 小于 $\lfloor |x|\rfloor + \{|x|\} + 1$ 的整数有且只有一个 $\lfloor |x|\rfloor + 1$，同时由于 $-\lfloor x\rfloor$ 是整数，于是有：

$$-\lfloor x\rfloor = \lfloor |x|\rfloor + 1 \to \lfloor x\rfloor = -(\lfloor |x|\rfloor + 1)$$

证毕！

定理 2：五度相生法的音律简易通项式为：

$$g(k) = f_0 \times 2^{\{k\times\log_2 3\}}, k \in Z \qquad (3)$$

其中，Z 表示整数，且：

（1）当 $k > 0$ 时，函数 $g(k)$ 生成上行五度音列，$g(k)$ 就是上行五度音列的第 k 个音律，也即 $g(k) = f_k$

（2）当 $k < 0$ 时，函数 $g(k)$ 生成下行五度音列，$g(k)$ 就是下行五度音列的第 $|k|$ 个音律，也即 $g(k) = f_{-k}$。

（3）当 $k = 0$ 时，函数 $g(0) = f_0$

证明：

（1）当 $k>0$ 时，根据公式（1）：

$$g(k)=f_0\times 2^{\{k\times\log_2 3\}}=f_0\times 2^{k\times\log_2 3-\lfloor k\times\log_2 3\rfloor}=f_0\times\frac{2^{k\times\log_2 3}}{2^{\lfloor k\times\log_2 3\rfloor}}=f_0\times\frac{3^k}{2^{\lfloor k\times\log_2 3\rfloor}}$$
$$=f_k$$

（2）当 $k<0$ 时：记 $i=-k=|k|$，由于 $\log_2 3$ 是无理数，而 $k<0$ 是整数，因此 $k\times\log_2 3$ 是无理数，由引理 2 可知，$\lfloor k\times\log_2 3\rfloor=-(\lfloor|k\times\log_2 3|\rfloor+1)=-(\lfloor i\times\log_2 3\rfloor+1)$。

于是根据公式（2）：

$$g(k)=f_0\times 2^{\{k\times\log_2 3\}}=f_0\times 2^{k\times\log_2 3-\lfloor k\times\log_2 3\rfloor}=f_0\times 2^{-i\times\log_2 3+(\lfloor i\times\log_2 3\rfloor+1)}$$
$$=f_0\times\frac{2^{\lfloor i\times\log_2 3\rfloor+1}}{2^{i\times\log_2 3}}=f_0\times\frac{2^{\lfloor i\times\log_2 3\rfloor+1}}{3^i}=f_i=f_{|k|}$$

（3）当 $k=0$ 时：

$$g(0)=f_0\times 2^{\{0\times\log_2 3\}}=f_0\times 2^0=f_0$$

证毕！

定理 2 的公式（3）不但把五度相生法的上行和下行的音律计算分数通项式统一起来，也能直接计算五度音列任意位置上的音律频率。利用公式（3），计算了上行五度音列第 1-12 个音律与起始律（即第 1 个音律）的频率比，同时计算了上行五度音列第 12001-12012 个音律与起始律的频率比，得到图 2。图 2 中，实线把第 1-12 个音律连起来，虚线第 12001-12012 个音律连起来，两条线上的音律从左到右是链式生成关系，比较两条线可知，五度相生法并不存在 12 个音律一组的重复出现。

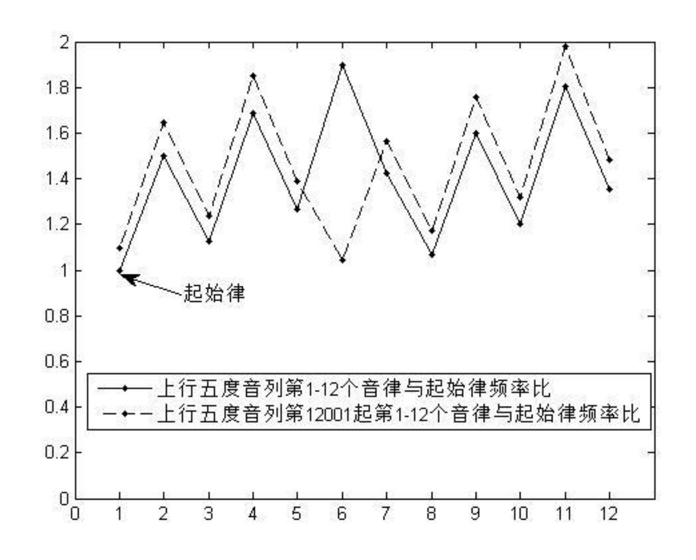


图 2 利用公式（3）计算五度相生法任意位置上的音律频率比

事实上有：

定理 3：给定起始律频率 f_0 的五度音列中不存在两个音律的频率相同，且五度音列中存在无穷个音律。

证明：用反证法，假设同一五度音列中存在两个音律的频率相同，分别是 $g(i)$ 和 $g(j)$，其中 $i \neq j$，那么，根据公式（3）有：

$$
\begin{aligned}
& g(i)=g(j) \rightarrow f_0 \times 2^{\{i \times \log_2 3\}} = f_0 \times 2^{\{j \times \log_2 3\}} \rightarrow \{i \times \log_2 3\} = \{j \times \log_2 3\} \\
& \rightarrow i \times \log_2 3 - \lfloor i \times \log_2 3 \rfloor = j \times \log_2 3 - \lfloor j \times \log_2 3 \rfloor \\
& \rightarrow (i-j) \times \log_2 3 = \lfloor i \times \log_2 3 \rfloor - \lfloor j \times \log_2 3 \rfloor
\end{aligned}
$$

在上式中，$(i-j)$,$\lfloor i \times \log_2 3 \rfloor$,$\lfloor j \times \log_2 3 \rfloor$三个数是整数，而 $\log_2 3$ 是无理数，所以等式左边是无理数，右边是整数，等式不成立。由于公式（3）中，自变量 k 的取值域是整数集，整数集包含有无穷个整数，因此五度音列中存在有无穷多个各不相同的音律。

证毕。

定理 3 说明了五度音列中的无穷个乐音都互不相同，也说明五度相生法不能实现回到起始律的目的。

定理 2 给出了五度相生法的简易的计算通项式，综合了上行五度音列和下行五度音列的音律计算公式。把上行五度音列和下行五度音列的各个音律放在同一个水平数轴上，数轴的中心点表示起始律，数轴上向左右无限延伸，向左延伸表示下行五度音列，向右延伸表示上行五度音列。见图 3，图 3 数轴下面表示数轴整数点上的数值，各个数值对应公式（3）中的自变量 k，数轴上方是上行音列和下行音列生律次数。

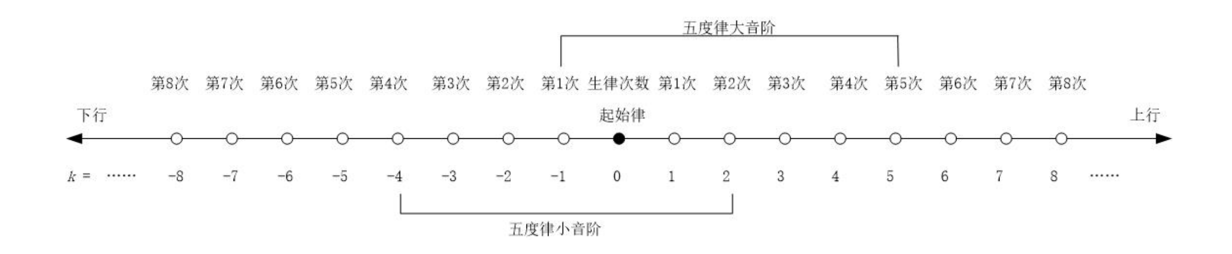


图 3 整数数轴上的五度音列

数轴上的整数点位置的所有音律构成一个五度相生法的五度音列，五度音列是双向无穷延伸的数列，中心点为起始律，五度音列上每个音律的所在位置对应一个整数，所有位置上的整数集合就是整数域。

3 音分计算

音分（cent）是 Ellis[10]提出的音律分析工具，根据文献[2]，两个乐音之间的音程音分值计算公式为：

$$音分值 = 3986.313(7) \times \log_{10}\left(\frac{F_2}{F_1}\right)$$

上式中的常数 3986.313 则是由 $\dfrac{1200(音分值的八度之值)}{0.30103(常用对数的八度之值)} = 3986.313(7)$，而常用对数的八度之值就是 $\log_{10} 2$，因此音分值的计算公式可以转换为：

$$音分值 = 3986.313(7) \times \log_{10}\left(\frac{F_2}{F_1}\right) = \frac{1200}{\log_{10} 2} \times \log_{10}\left(\frac{F_2}{F_1}\right) = 1200 \times \frac{\log_{10}\left(\frac{F_2}{F_1}\right)}{\log_{10} 2} = 1200 \times \log_2\left(\frac{F_2}{F_1}\right) \quad (4)$$

下面利用公式（3）和公式（4）来计算五度音列上位置 k 处音律与起始律之间音程音分值，起始律的频率为 f_0，位置 k 处音律的频率为 $f(k)$，因此它们之间的音分值为：

$$c(k) = 1200 \times \log_2\left(\frac{f(k)}{f_0}\right) = 1200 \times \log_2\left(\frac{f_0 \times 2^{\{k \times \log_2 3\}}}{f_0}\right) = 1200 \times \{k \times \log_2 3\} \quad (5)$$

利用公式(5)可方便地计算五度音列上任意位置处音律的音分值，由于 $\log_2 3$ 是无理数，因此 $1200 \times \{k \log_2 3\}$ 也是无理数，这样五度音列上的所有音律的音分值都是无理数，这所有的无理数构成一个双向无穷延伸的五度音分数列：

$$\cdots 1200 \times \{-3\log_2 3\}, 1200 \times \{-2\log_2 3\}, 1200 \times \{-\log_2 3\}, 0, 1200 \times \{\log_2 3\}, 1200 \times \{2\log_2 3\}, 1200 \times \{3\log_2 3\}, \cdots$$

很显然，五度音分列上的每个数值都是无理数常数，五度音分数列就是常数数列。

从五度音列上取出有限个连续音律可以构成音阶。如五度律大音阶是在五度音列上，从起始律向下取一律再向上取五律而构成，其对应频率计算的公式（3）和音分值计算的公式（5）中变量 k 的范围为 $-1 \le k < 5$；五度律小音阶是在五度音列上，从起始律向下取四律再向上取二律而构成，其对应频率计算的公式（3）和音分值计算的公式（5）中变量 k 的范围为 $-4 \le k < 2$，位置范围可参见图 3。

表 1 给出了利用公式（1）、公式（2）和公式（5）计算五度律大小音阶的计算结果，表的上半部分列出了利用公式（1）和公式（2）计算各音与主音的频率比，下半部分列出了利用公式（5）计算得到的各音的音分值。

表 1 五度律大小音阶各音的频率比与音分值

音名	$^{b}a^1$	$^{b}e^1$	$^{b}b^1$	f^1	c^1	g^1	d^1	a^1	e^1	b^1
生律方向	下行五度音列				起始律	上行五度音列				
生律	4	3	2	1		1	2	3	4	5

次序 i										
所用公式	公式（2）$\frac{2^{\lfloor i\log_2 3\rfloor+1}}{3^i}$					公式（1）$\frac{3^i}{2^{\lfloor i\log_2 3\rfloor}}$				
与主音频率比	$\frac{128}{81}$	$\frac{32}{27}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{243}{128}$
数轴 k	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
所用公式	公式（4）$1200\times\{k\log_2 3\}$					公式（4）$1200\times\{k\log_2 3\}$				
从主音其的音分值	792.18	294.13	996.09	498.05	0	701.96	203.91	905.87	407.82	1109.78
大小音阶	五度律小音阶									
				五度律大音阶						

4 音分分布

4.1 一致分布

由公式（1）、公式（2）、公式（3）和公式（5）可知，五度相生法使用了无理数 $\log_2 3$，无理数是一类特殊的数，包含有无理数的多项式通常具有一些特殊的性质。根据哈代［11］的 THEOREM 445、华罗庚［12］第 80 页定理 3，有如下结论：

引理 3：（一致分布，Uniform Distribution）：对于一个无理数 $\alpha>0$，$\{\alpha i\}, 1\le i<\infty$ 在区间 $(0,1)$ 是一致分布。

由引理 3 可以得出如下结论。

定理 4 除了起始律外，上行五度音列的所有音分值在区间 $(0,1200)$ 中是一致分布的。

证明：根据公式（5）$1200\times\{k\log_2 3\}$ 可知，五度相生法生成的音律的音分值只和它的位置 k 有关，由于 1200 是常数，因此各音律音分值由 $\{k\log_2 3\}$ 决定，由引理 3 可知当 $\alpha=\log_2 3, 1\le k<\infty$，$\{k\log_2 3\}$ 在区间 $(0,1)$ 是一致分布，因此 $1200\times\{k\log_2 3\}$ 区间 $(0,1200)$ 中是一致分布的。证毕！

定理 4 说明了上行五度音列的无穷个音律的音分值在八度区间内是一致分布的，是稠密的，也说明存在无穷对音律，它们之间的音程的音分值趋向于无穷小。

4.2 Steinhaus 猜想与三间隔理论

在二十世纪四十年代，H. Steinhaus 提出了有关无理数的一个猜想，称为 Steinhaus 猜想，后这个猜想由 V. T. Sós 等人陆续给出了不同证明［13, 14, 15］，现也称 Steinhaus 猜想为三间隔理论。Richaard Krantz 和 Jack Douthett 等

人[16]把三间隔理论用于音律分析中，下面的给出其中的一个结论。

引理 4：对于一个无理数$\alpha > 0$，由 n 个数$\{\alpha i\}, 1 \le i \le n$分布在周长为 1 的单位圆的圆周上，那么圆周上相邻两个数之间的间隔（圆弧），不同长度的间隔不超过三个。如果不同长度的间隔数有三个，那么其中最长间隔的长度是其他两个间隔长度的和。进一步，当且仅当 i 是α的连分数的中间渐近分数（ intermediate convergent）的分母时，不同长度的间隔只有二个。

五度相生法中使用的无理数$\alpha = \log_2 3$，根据引理 4 可知，除了起始律外，上行五度音列的第 2 个（对应引理 4 的 i=1）起，连续取 n 个乐音构成一个音阶，音阶的相邻音级的不同音程要么有三个，要么有二个。利用文献[17]可计算出$\alpha = \log_2 3$的前几个连分数的中间渐近分数为：

$$\frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{11}{7}, \frac{19}{12}, \frac{27}{17}, \frac{46}{29}, \frac{65}{41}, \frac{84}{53}, \frac{149}{94}, \frac{233}{147}, \frac{317}{200}, \frac{401}{253}, \frac{485}{306}, \frac{1054}{665}, \frac{1539}{971}, \cdots$$

根据引理 4，当 n 等于某个渐进分数的分母时，音阶的相邻音级的不同音程只有二个。

对于五度相生法中使用的无理数$\alpha = \log_2 3$，我们来图示$1 \le n \le 10$时引理 4 的结论，得到图 4。在图 4 中有 10 个不同的圆环，从内到外对应$1 \le n \le 10$，每个圆环被 n 个数$\{\alpha i\}, 1 \le i \le n$分割为长度不同的 n 个小圆弧。为了能方便地表示 n 个数$\{\alpha i\}, 1 \le i \le n$的圆弧之间的关系，把这些数在圆周上的分布用圆弧角表示，每个$\{\alpha i\}, 1 \le i \le n$的圆弧角是圆周上的对应点与圆心的连线，圆弧角的起始边是坐标的水平轴。

为了方便观察，设定不同的圆为半径分别为 n 小圆环，颜色相同的小圆弧对应的圆弧角相同。仔细观察图 4，当 n=1，圆周上有 1 个点，但圆环只有一个，就是整个圆，当 n=2 时，圆周上有 2 个点，整个圆环被分为紫色和绿色两种颜色的两个小圆弧，当 n=3 时，圆周上有 3 个点，整个圆环被分为淡蓝色和绿色两种颜色的三个小圆弧，其中绿色圆弧有 2 个，当 n=4 时，圆周上有 4 个点，整个圆环被分为淡蓝色、绿色和军绿色三种颜色的四个小圆弧，其中淡蓝色圆弧有 2 个，容易观察得知，当 n 分别是 2、3、5、7 时，对应的圆环被分割成两种颜色的小圆弧，也就是所有圆环对应的不同圆弧度只有两种，这和上面的$\alpha = \log_2 3$的连分数渐近分数的分母是 2、3、5、7 一致，引理 4 结论正确。

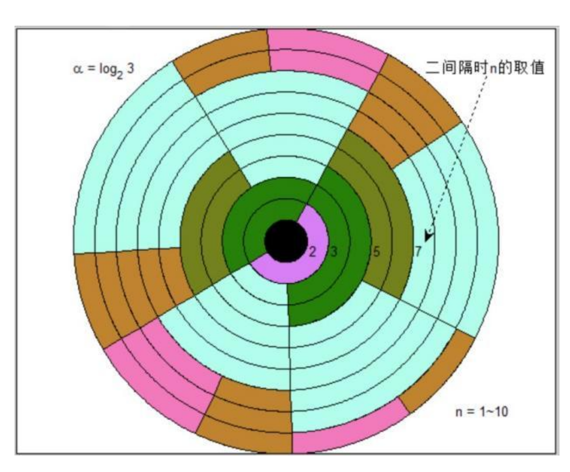


图 4 无理数与整数的乘积的小数值在不同圆环上的分布

引理 4 的自变量取值范围是从 1 开始的连续 n 个数，而五度律大音阶和小音阶的乐音分别取自上行五度音列和下行五度音列，其在图 3 中的位置范围分别为-1~5 和-4~2，因此文献[18]推广了引理 4 的结论，把 $\{\alpha i\},1\le i\le n$ 的自变量 i 的定义域推广到整数域，即当 $\{\alpha i\},m+1\le i\le m+n,m\in Z$ 时，引理 4 也成立。因此，五度律大音阶和小音阶的相邻音级的不同音程只有两种，同时在五度音分数列中，连续取值数量是 $\alpha=\log_2 3$ 的连分数的中间渐近分数的分母时，组成的音阶的不同音程只有两种，不是分母值时，有三种。

5 音差分析

音差(common)是一种微小音分值的音程[2]。常见的音差有普通音差 21.506、最大音差 23.46(也叫毕达哥拉斯音差,Pythagorean common[1])、京房音差[19]、钱乐之音差[8]等，音差在音阶的定律过程中起着重要的作用，西方音乐实践所使用的中庸全音律（Mean-tone Temperament），如 Zarlino 的四分之一音差中庸全音律（1/4comma ）就是利用普通音差划分为更小音差到其他四个音律而产生的律制[20]。

在我国古代，三分损益律是音律的主要研究对象，音律文献中记录了三分损益律的计算的结果，称为律数，现代律学研究文献中的也称为振动体长度[2]，在其他条件不变的情况下，振动体长度和振动频率呈反比。三分损益法计算律数的乘法因子是 2/3 和 4/3，对应的是五度相生法频率计算所用的乘法因子 3/2 和 3/4，说明利用三分损益法生成的八度内的音律一一对应五度相生法的上行五度音列，因此，三分损益法的音律音分值可利用公式（5）中的$1200\times\{k\log_2 3\},k\ge 1$来计算。

利用定理 3 可知，由三分损益法可计算出无穷个律数互不相同的音律，根据定理 5，这无穷个音律的音分值在区间$(0,1200)$中是一致分布的。下面讨论当用三分损益法计算有限个音律时，它们的音分值在区间$(0,1200)$的分布情况，先给出文献[14]给出的一个结论。

引理 5：对于一个无理数$\alpha>0$，n 个数$\{\alpha k\},1\le k\le n$，落在区间$[0,1]$内，把

区间$[0,1]$分割为 n+1 个小间隔。假设当$k=w$时，$\{\alpha w\}$是 n 个数$\{\alpha k\}$数中最小的数，当$k=v$时，$\{\alpha v\}$表示 n 个数$\{\alpha k\}$数中最大的数，那么：

（i）长度为$\{\alpha w\}$的小间隔有$n+1-w$个；

（ii）长度为$1-\{\alpha v\}$的小间隔有$n+1-v$个；

（iii）长度为$1-\{\alpha v\}+\{\alpha w\}$的小间隔有$w+v-n-1$个。

利用引理 5 来计算“京房六十律”和“钱乐之三百六十律”的不同音差及其个数。由于八度内三分损益法生成的音律的音分值可以用$1200\times\{k\log_2 3\}, k\geq 1$计算，也即引理 5 中的$\alpha=\log_2 3$。引理 5 的区间$[0,1]$对于八度音分值区间$[0,1200]$，由于“京房六十律”和“钱乐之三百六十律”的黄钟律是起始律，其对应的音分值为 0，因此“京房六十律”和“钱乐之三百六十律”的自变量取值个数 n 分别是 59 和 359。

当 n=59 时，容易计算出 w=53, v=41，$\{\alpha w\}=\{53\log_2 3\}\approx 0.00301253822128$，音分值为此数乘以 1200，即$1200\times\{\alpha w\}=1200\times\{53\log_2 3\}\approx 3.61504586554133$，出现的次数为$n+1-w=59+1-53=7$，$1-\{\alpha v\}=1-\{41\log_2 3\}\approx 0.01653747043260$，音分值为约 19.84496451911468，出现的次数为$n+1-v=59+1-41=19$，这里的 19 个包含最大值到区间$[0,1]$右端的小间隔，其长度为$1-\{\alpha v\}$；第三个间隔长度约为$1-\{\alpha v\}+\{\alpha w\}=1-\{41\log_2 3\}+\{53\log_2 3\}\approx 0.01955000865388$，音分值约为 23.46001038465602，它正好时其他两个音分值的和，它出现的次数为 $w+v-n-1=53+41-59-1=34$。

当 n=359 时，容易计算出 w=359, v=306，$\{\alpha w\}=\{359\log_2 3\}\approx 0.00153775889510$，音分值约为 1.84531067411626，出现的次数为$n+1-w=359+1-359=1$，$1-\{\alpha v\}=1-\{306\log_2 3\}\approx 0.00147477932614$，音分值约为 1.76973519137391，出现的次数为$n+1-v=359+1-306=54$，这里的 54 个包含最大值到区间$[0,1]$右端的小间隔，其长度为$1-\{\alpha v\}$；第三个间隔长度约为 $1-\{\alpha v\}+\{\alpha w\}=1-\{306\log_2 3\}+\{359\log_2 3\}\approx 0.00301253822124$，音分值约为 3.61504586549017，它正好时其他两个音分值的和，它出现的次数为 $w+v-n-1=359+306-359-1=305$。

陈应时先生在文献[19]和[8]对“京房六十律”和“钱乐之三百六十律”进行了重新计算，他分析得出它们都存在三个不同音差的结论，并统计了不同音差出现的次数。下表是陈应时文献和引理 5 的两种计算结果。

表 2 陈应时文献和引理 5 计算结果的比较

	文献[19]和[8]计算结果		引理 5 计算结果	
	音分值	出现个数	音分值	出现个数
“京房六十律”	3.6150458655331404577968250811297	7	3.61504586554133	7
	19.844964519115872476043957767426	18	19.84496451911468	19
	23.460010384649012933840792848556	34	23.46001038465602	34
“钱乐之三百六十律”	1.8453106740829702707370527190324	1	1.84531067411626	1
	1.769735191450170187059782361776	53	1.76973519137391	54

	3.6150458655331404577968350811352	305	3.61504586549017	305

比较表 2 可知，对于“京房六十律”的音分值，两种计算结果略有不同，但小数点后的前 9 位是相同的，对于“钱乐之三百六十律”音分值，两种计算结果也略有不同，但小数点后的前 8 位是相同的。出现这样的计算精度误差是由多个原因产生的，数值计算的精度受计算方法、所用硬件和软件等的影响。

在计算方法上，文献[19]和[8]利用三分损益法进行链式计算，先计算出律数间的整数比，再计算出整数比的小数值，再利用音分值计算公式（4）计算小数值的对数值（即音分值），这里的误差可能会出现在求整数比的小数值和公式（4）的计算过程。文献[19]计算了黄钟大数（3^{59}）的整数值，但“钱乐之三百六十律”的黄钟大数（3^{359}）却极难简单计算（见文献[8]），因此“京房六十律”的每个音律的大整数律数可计算得到，而“钱乐之三百六十律”的每个音律的大整数律数不容易计算得到。再者，两个整数律数相除计算小数值，由于三分损益法的乘法因子中分母是 3，无法除尽，因此两个整数相除无法得到准确的小数值计算结果，只能得到有误差的近似值，在链式计算时，这个误差会向后累积，最后利用公式（4）的计算小数值的对数也会出现误差，而且由于不同音律都要分别计算整数比和对数，因此其误差无法统一估计。

利用引理 5 计算音分值则利用了公式（5），在公式（5）中，$\log_2 3$是无理数，其他都是整数，因此其数值计算的误差由无理数$\log_2 3$的精度决定，只要计算出符合精度要求的$\log_2 3$的小数值，就能统一估计所有音律的误差，且不存在累积误差。

比较表 2 的音分值在“京房六十律”和“钱乐之三百六十律”出现的次数，发现其中一个音分值出现的次数都相差 1，这是因为它们统计的范围不一样，如下图 5 以“京房六十律”为例说明了它们的统计范围。

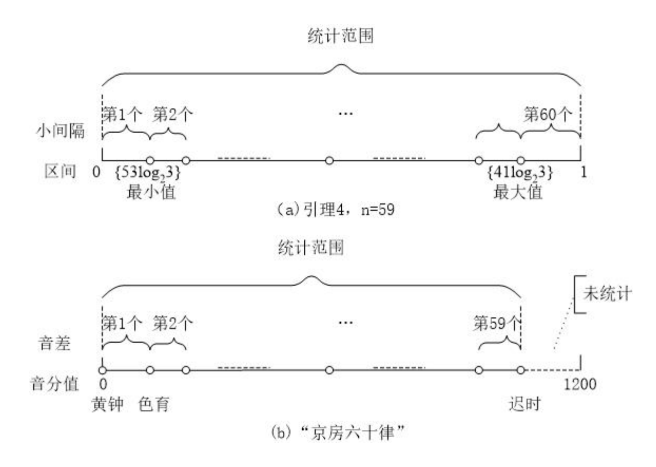


图 5 引理 5 小间隔和“京房六十律”音差的图示

在图 5 中，上半图和下半图分别是对引理 5 的小间隔和“京房六十律”的音差的说明。在引理 5 中，n 个数$\{\alpha k\}, 1 \le k \le n$，落在区间$[0,1]$内把区间分割为 n+1 个小间隔，图 5 中 n=59，把区间分割为 60 个小区间。文献[19]统计了“京房六十律”的六十个音律之间的 59 个音差，由于一个八度的区间范围为$[0,1200]$，音分值最大的“迟时”律和音分值 1200 之间的音差未被统计在内，而这个音差的音分值正是$1200 \times (1-\{41\log_2 3\}) \approx 19.84496451911468$，所以两种统计方法在表 2 中“京房六十律”的音分值 19.84496451911 的个数少 1。同样的原因，表 2 中

“钱乐之三百六十律”的音分值 1.76973519137391 的个数少 1。

陈应时先生在文献[19]和[8]对“京房六十律”和“钱乐之三百六十律”得出只存在三种不同音差的结论，和引理 4 的三间隔结论相符，统计的不同音差出现的次数，与引理 4 的结论相符。事实上，利用三分损益法生成的起始律高一个八度内的任意给定数量的音律都符合引理 4 和引理 5 的结论。图 6 给出了三分损益法计算的音律，不同数量音律的音分值在八度内的分布图。

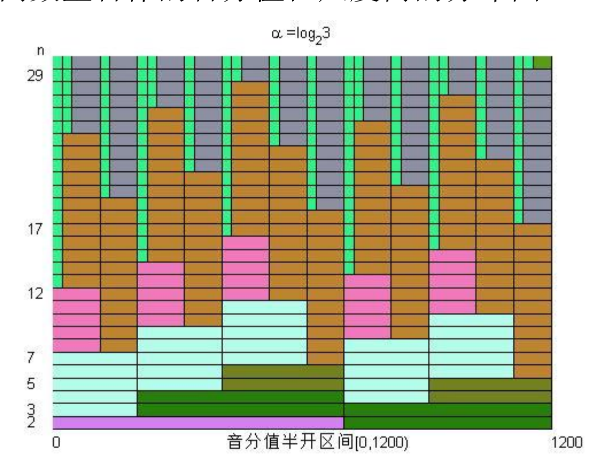


图 6 三分损益法的不同数量音律的音分值分布

5 结论

五度相生法作为常见的音律生成方法，其通项计算公式具有广泛的应用，在音律分析中，只要涉及到音律的具体数值，都能得到应用。本文中利用通项计算公式分析的五度相生法的无穷个音律音分值分布和有限个音律的音差分布，在未来，我们可以把它与十二平均律在音阶上的应用进行比较，由于十二平均律在八度内也有通项计算公式，即 $h_k = f_0 \times 2^{\left\{\frac{k}{12}\right\}}, 1 \le k \le 11$，对公式（3）和此公式进行偏差估计[21]，是一项有意义的工作。

参考文献：

[1] J. Murray Barbour. Tuning and Temperament: A Historical Survey [M]. Dover Publications, Inc, Mineola, New York, 2004:1-13

[2] 缪天瑞. 律学（第三版）[M]. 人民音乐出版社，2006：34-36,51,103,117.(Miao Tianrui. Temperament(Third Edition) [M]. People's Music Publishing House, 2006：34-36,51,103,117.)

[3] Hrudi Hammel Garland, Charity Vaughan Kahn. Math and Music [M]. Dale Seymour Publications, 1995:45-55

[4] 陈应时. 中国乐律学探微 [M]. 上海音乐学院出版社，2004：53.(Chen Yingshi A Study of Chinese Music Tuning [M]. Shanghai Conservatory of Music Press, 2004：53.)

[5] Gerald J.Balzano,The Group-theoretic Description of 12-Fold and Microtonal Pitch Systems [J]., Computer Music Journal, Vol.4, No.4, Winter 1980

[6] Fichard J. Krantz, Jack Douthett. A measure of the reasonableness of equal-tempered musical scales [J].. J. Acoust. Soc. Am. 95(6). June 1994

[7] 陈其翔，陆志华.用分数逼近法研究三分损益律[J].音乐艺术(上海音乐学院学

报),1997(03):55-57.DOI:10.19359/j.cn31-1004/j.1997.03.018.(Chen Qixiang, Lu Zhihua. Research on the tone of Sanfen Sunyi-lv with the Method of Fractional Approximation [J]. Music Art(Journal of Shanghai Conservatory of Music), 1997 (03): 55-57.)

[8]陈应时."钱乐之三百六十律"中的三种音差[J].南京艺术学院学报(音乐与表演版),2009(02):1-6.(Chen Yingshi. Three kinds of tone difference in "Qian Lezhi's 360 temperament". Journal of Nanjing Academy of Arts (Music and Performance Edition), 2009(02):1-6.)

[9] Kenneth H. Rosen 著，夏鸿刚译，初等数论及其应用 [M]，机械工业出版社，2019,P:6.(Kenneth H. Rosen. Elementary Number Theory and Its Application [M]. China Machine Press, 2019,P:6.)

[10] Alexander J. Ellis. Musical Scales of Various Nations [J]. Nature, 31, 488–490 (1885). https://doi.org/10.1038/031488a0

[11] Hardy G. H., Wright, E. M., Heath-Brown, D. R., Silverman, J. H. (2008). An Introduction to the Theory of Numbers [M], Sixth Edition, Oxford University Press: 520–523.

[12] 华罗庚．指数和的估计及其在数论中的应用 [M]．北京：科学出版社，1963：80.(Loo-Keng Hua.The Estimation of Exponential Sum and Its Application in Number Theory [M]. Beijing: Science Press,1963：80.)

[13] V. T. Sós (1958). On the distribution mod 1 of the sequence nα [J].. Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös Sect. Math. 1:127–134.

[14] N. B. Slater. (1967). Gaps and steps for the sequence n mod 1. Proc Cambridge Philos. Soc., 63(4):1115–1123.

[15] Shiu, P. A footnote to the three gaps theorem [J]. Amer. Math. Monthly 125(3), 2018: 264–266. doi.org/10.1080/00029890.2018.1412210

[16] Richaard Krantz, Jack Douthett. Algorithmic and computational approaches to pure-tone approximations of equal-tempered musical scales [J]. Journal of Mathematics and Music, Vol. 5, No. 3, 2011:171-194

[17] 潘承洞，潘承彪. 初等数论（第三版） [M]，北京大学出版社, 2013:311-367.(Pan Chengtong, Pan Chengbiao. Elementary Number Theory [M]. Peking University Press, 2013:311-367.)

[18] Gen-Fang Chen. Generalization of Steinhaus conjecture. International Conference on Pure, Applied and Computational Mathematics, 2023(已录用)

[19] 陈应时."京房六十律"中的三种音差 [J].中国音乐,2007(01):34-37. (Chen Yingshi. Three kinds of tone difference in "King Fang's 60 temperament". Chinese Music, 2007(01):34-37.)

[20] Thomas Christensen. The Cambridge history of western music theory [M], Cambridge university press, 2002:195

[21] 朱尧辰，王连祥，丢番图逼近引论 [M]，科学出版社，2016：310.(Zhu Raochen, Wang Lianxiang. A introduction of Diophantine approximation [M]. Science Press, Beijing, 2016:310.)